Suites de polygônes

Gourdon p. 190 Voyage en Algèbre p. 45-47

lemme : Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ Alors on a

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) \quad \text{avec} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{et} \quad P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}$$

démo : On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi on a $A = \sum_{i=1}^{n} a_i J^{i-1}$

On va diagonaliser J pour avoir l'expression de ses puissances :

J est la matrice de permutation associée à un n-cycle, donc elle vérifie $J^n = id_n$.

Donc ses valeurs propres sont des éléments de μ_n. $\hookrightarrow X^n - 1 = \prod_{\zeta \in \mu_n} (X - \zeta)$ $\Rightarrow \zeta \in \mu_n$.

Réciproquement, si $\omega \in \mu_n$ alors $v_\omega := (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ est un vecteur propre de J pour la valeur propre ω.

Ainsi J possède n valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

Il existe alors $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $J = P^{-1} D P$ avec $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$.

$$\text{D'où } \det(A) = \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i J^{i-1}\right) = \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P^{-1} D^{i-1} P\right) = \det\left(\sum_{i=1}^{n} a_i D^{i-1}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

prop : Soit P_0 un polygône à n sommets $(z_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbb{C}^n$. On définit par récurrence la suite de polygônes suivante :

$\forall k \in \mathbb{N}$ P_{k+1} est formé par les milieux des arêtes de P_k.

Alors on a $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P_0, noté g.

démo : On remarque que : $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_{k+1} \overset{(*)}{=} A P_k$ avec $A = \frac{1}{2} id_n + \frac{1}{2} J$.

On a donc par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$ $P_k = A^k P_0$.

On cherche alors à diagonaliser A :

$$\chi_A(X) = \det(A - X id_n) = \det\left(\left(\tfrac{1}{2} - X\right) id_n + \tfrac{1}{2} J\right)$$

On reconnaît un déterminant circulant avec $a_1 = \frac{1}{2} - X$, $a_2 = \frac{1}{2}$ et $\forall i \in [\![3, n]\!]$ $a_i = 0$.

Par le lemme, on a alors

$$\chi_A(X) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} - X + \frac{\omega^k}{2} = \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda_k - X) \quad \text{avec } \lambda_k = \frac{1+\omega^k}{2}.$$

On remarque que $\lambda_j = \lambda_k$ ssi $j = k$. Donc $\chi_A(X)$ est scindé à racines simples, ie A est diagonalisable.

Il existe alors $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = Q^{-1} D Q$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$

Donc $A^k = Q^{-1} D^k Q$. Or pour $j \in [\![1, n-1]\!]$ on a

$$|\lambda_j| = \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left| e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{-ij\pi}{n}} + e^{\frac{ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left|\cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)\right| < 1$$

Donc on a $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = \mathrm{diag}(1,0,\dots,0)$ et par continuité de la conjugaison on a $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = Q^{-1} \underbrace{\mathrm{diag}(1,0,\dots,0)}_{=D_\infty} Q$. Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = P_\infty$ avec $P_\infty := Q^{-1}\mathrm{diag}(1,0,\dots,0) Q P_0$

et on a $D_\infty = D_\infty^2$ $\Rightarrow$ D_∞ projecteur $\xrightarrow{}$ vrai de manière générale $A^k \to B$ alors $A^{2k} \to B$, $A^{2k} \to B^2 \Rightarrow B = B^2$

Par (*) on a $P_\infty = A P_\infty$, par continuité du produit de matrices.

Or l'espace propre associé à 1 est de dimension 1 et contient $(1, \dots, 1)$ donc il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $P_\infty = (a, \dots, a)$.

Par associativité des barycentres, on a : $\mathrm{Isobar}(P_{k+1}) = \mathrm{Isobar}(P_k) = \dots = \mathrm{Isobar}(P_0) = g$.

Comme l'application $(z_1, \dots, z_n) \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_n$ est continue, on a

$$a = \mathrm{Isobar}(P_\infty) = \mathrm{Isobar}\left(\lim_{k\to+\infty} P_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathrm{Isobar}(P_k) = \lim_{k\to+\infty} \mathrm{Isobar}(P_0) = g.$$

Ainsi $P_\infty = (g, \dots, g)$. Autrement dit $\lim\limits_{k\to+\infty} P_k = (g, \dots, g)$.